

Inhalt

Editorial	Seite 1	Monte Carlo auf dem fx-CG50	Seite 5	Fake News zu Covid-19	Seite 9
Neues von den Hanoi-Türmen	Seite 1	Entdeckungen am rechtwinkligen Dreieck	Seite 6	Ein Blick auf Neuronale Netze mit dem ClassPad	Seite 10
Einleitung zur Python-Reihe	Seite 3	Knobelaufgaben	Seite 7	Anschauung für die Differentialrechnung	Seite 11
Rekursive Pythonfunktionen mit dem FX-CG50	Seite 4	Die schnellste Skateboard-Bahn	Seite 8	Lehrer-Info-Service und Impressum	Seite 12

Editorial

Liebe Lehrerinnen, liebe Lehrer,

vor Ihnen liegt die erste Ausgabe des Casio forum im neuen Schuljahr. Uns haben wieder viele Beiträge zu den verschiedensten Themen des Mathematikunterrichts erreicht. Einige davon befassen sich mit Beispielen zur Programmierung mit Python. Da das ein interessantes Thema ist, das uns sicher noch eine Weile begleiten wird, haben wir uns entschlossen, in den nächsten Ausgaben dieses Thema immer wieder aufzugreifen. In dieser Ausgabe gibt es gleich drei Beiträge zum Programmieren mit Python: zur Monte-Carlo-Methode, über rekursive Funktionen und ein Beispiel zur „Turm von Hanoi“-Aufgabe.

Ein weiterer Beitrag stellt ziemlich unbekannt Zusammenhänge beim rechtwinkligen Dreieck vor:

$$1/a^2 + 1/b^2 = 1/h^2.$$

Mit geometrischen Figuren beschäftigen sich auch die drei kleineren Knobelaufgaben. Und wie „Fake News“ im Bereich der Berichterstattung zu Corona durch statistisch saubere Auswertungen von bekannten Daten aufgedeckt werden können, erfahren Sie in einem weiteren interessanten Bericht. Vielleicht können solche Arbeiten bald Neuronale Netze erledigen? Wie die prinzipiell funktionieren, können Sie in dieser Ausgabe ebenfalls erfahren.

Einen Überblick über Supportangebote finden Sie auf der Casio-Internetseite. Über Rückmeldungen, Anregungen oder eigene Beiträge zur nächsten Ausgabe freuen wir uns immer. Gerne auch als Mail an education@casio.de.

Ihr Redaktionsteam

Aufgabenbeispiel

Neues von den Hanoi-Türmen

Autor: Jürgen Appel, Deutschorden-Gymnasium, Bad Mergentheim



1) Die klassische Variante mit drei Stäben

Von dem Mathematiker ÉDOUARD LUCAS (1842–1891) stammt die folgende Legende: Der indische Gott Brahma soll in einem Tempel einen Turm errichtet haben, der aus 64 goldenen Kreisringen, die auf einem kupfernen Stab stecken, besteht. Diese Kreisringe werden nach oben immer kleiner. Er wird heute Turm von Hanoi genannt. Neben dem kupfernen Stab mit dem Turm gibt es noch zwei weitere, leere Stäbe, einen silbernen und einen goldenen. Brahma gab seinen Priestern die Anweisung: „Baut den Turm auf dem goldenen Stab neu auf.“

Jedoch sind folgende Regeln zu beachten:

- 1) Es darf in einem Schritt jeweils nur ein Ring bewegt werden.
- 2) Ein Ring darf nur auf einen leeren Stab oder auf einen größeren Ring gelegt werden.

Wenn alle 64 Scheiben von dem Stapel, auf die Gott sie bei der Erschaffung der Welt

gesetzt hat, auf einen der anderen Plätze gebracht sind, werden der Turm samt dem Tempel und alle Brahmanen zu Staub zerfallen, und die Welt wird untergehen.“

Didaktische Hinweise

Den Schülerinnen und Schülern sollten die Potenzgesetze bekannt sein, damit sie eine explizite Darstellung der allgemeinen Formel in Abhängigkeit von der Anzahl n der Ringe angeben können. Der CASIO FX-87DE X kann dann zur Berechnung von Folgliedern verwendet werden. Dies kann zum einen rekursiv in der Tabellenkalkulation oder explizit im Tabellen-Menü erfolgen. Zur Visualisierung des Problems und zum Ausprobieren für kleine n eignen sich auch Münzen mit verschiedenen Durchmessern (die haben die Schülerinnen und Schüler meist zur Hand) und drei verschiedenfarbige Papierstreifen (diese übernehmen die Rolle der Stäbe), auf die die Münzen gelegt werden können.

Fortsetzung auf Seite 2

Lösung für k = 3

a)

Anzahl n der Ringe	1	2	3	4	5	6
Anzahl z_n der Züge	1	3	7	15	31	63

b)
 rekursiv: $z_{n+1} = 2 \cdot z_n + 1$; $z_1 = 1$
 explizit: $z_n = 2^n - 1$

c)
 Abschätzung für die benötigte Zeit

Wenn für jede Umlegung eine Zeit von einer Sekunde vorgesehen wird, dann würde das Umlegen der 64 Scheiben $z_{64} = 2^{64} - 1 \approx 1,845 \cdot 10^{19}$ Sekunden benötigen.

$1,845 \cdot 10^{19} \approx 5,849 \cdot 10^{11}$ Jahre \approx 584,9 Milliarden Jahre.

Das Universum existiert allerdings erst seit ca. 14 Milliarden Jahren (unsere Erde seit ca. 4,5 Milliarden Jahren).

Einsatz des CASIO FX-87DE X

Berechnung der rekursiven Folge mit der Tabellenkalkulation:



2) Die Türme von Hanoi mit vier Stäben

Didaktische Hinweise

Eine Aufgabe zu den Türmen von Hanoi mit vier Stäben sollte sinnvollerweise nur dann gestellt werden, wenn die Klasse Kenntnisse von Folgen hat (rekursive und explizite Darstellung). Es bietet sich daher der Vertiefungskurs Mathematik oder eine Mathematik-AG für Begabte oder besonders Interessierte an. Natürlich bietet der WTR weniger Möglichkeiten als der GTR, aber für nicht allzu große n hilft auch hier die Tabellenkalkulation oder die CALC-Funktion des CASIO FX-87DE X.

Zu empfehlen ist auch hier eine geeignete Visualisierung zum Ausprobieren.

Lösung für k = 4

Folgende Strategie bietet sich an. Um den größten Ring vom 1. Stab auf den 4. Stab umlegen zu können, müssen die übrigen (n - 1) Ringe auf dem 2. und 3. Stab zwischengelagert werden. Es entstehen zwei Teilstapel, aus v Ringen bzw. aus d Ringen. Es muss gelten: $v + d = n - 1$. Um den ersten Teilstapel z.B. auf den 2. Stab umzulegen, stehen alle vier Stäbe zur Verfügung. Für die Umlegung des zweiten Teilstapels auf den 3. Stab sind allerdings nur drei Stäbe verfügbar (Der 2. Stab ist „blockiert“). Dann wird der größte Ring auf den „Zielstab“ (also hier den 4. Stab) umgelegt. Anschließend wird der zweite Teilstapel mithilfe von drei Stäben auf den 4. Stab und zum Schluss der erste Teilstapel mithilfe von vier Stäben auf den 4. Stab gelegt.

Sei $A_3(n)$ die Anzahl der Züge um einen Stapel mit n Ringen mit 3 Stäben auf einen anderen Stab umzulegen. Sei $A_4(n)$ die Anzahl der Züge um einen Stapel mit n Ringen mit 4 Stäben auf einen anderen Stab umzulegen. Es gilt:

$$A_4(n) = A_4(v) + A_3(d) + 1 + A_3(d) + A_4(v) = 2 \cdot (A_4(v) + A_3(d)) + 1$$

Ab jetzt ist viel Intuition gefragt, um eine optimale Zerlegung von $n - 1$ in die beiden Summanden v und d zu finden. Es stellt sich die Frage: Für welches v bzw. d wird $2 \cdot (A_4(v) + A_3(d)) + 1$ minimal? Dies ist äquivalent dazu, dass $A_4(v) + A_3(d)$ minimal wird. Dabei ist klar, dass nur die Fälle $v \geq d$ sinnvoll sind, da $A_3(n)$ sicher schneller anwächst als $A_4(n)$. Zunächst wird eine Tabelle für $A_3(n) = 2^n - 1$ erstellt. Dann werden durch Ausprobieren die ersten Werte für $A_4(n)$ bestimmt und in dieser Tabelle festgehalten.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A_3(n)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
Anstieg		+2	+4	+8	+16	+32	+64	+128	+256	+512	+1024

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A_4(n)$	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65
Anstieg		+2	+2	+4	+4	+4	+8	+8	+8	+8	+16

Als Beispiel soll der Wert von $A_4(12)$ bestimmt werden. Es gilt: $12 - 1 = 11$ und somit muss $v + d = 11$ gelten. Entscheidend ist, bei welcher Erhöhung von d oder v um 1 die Anzahl der Züge stärker zunimmt.

Beispiele:

d	2	3	4	5
v	9	8	7	6
$A_4(12)$	89	81	81	97

Es ist zu sehen, dass die minimale Anzahl für d = 3 oder 4 erzielt wird. Gibt es ein Muster für die Zunahme der Werte zwischen benachbarten $A_4(n)$? Bei $A_3(4)$ bis $A_4(7)$ ist der Zuwachs zum nächsten Wert jeweils +8. Wird jetzt n um 1 erhöht, sollte d = 4 zu-

nächst konstant bleiben und dafür $v = 7$ um 1 erhöht sein, denn dadurch beträgt die Zunahme in der Summe $A_4(v) + A_3(d)$ nur +8 statt +16. Wegen der Multiplikation mit dem Faktor 2 nimmt daher die Anzahl der Züge von $A_4(12)$ zu $A_4(13)$ um $2 \cdot 8 = 16$ zu. Dieser Zuwachs bleibt bei +16, solange $v = 10$ nicht überschritten wird. Somit gibt es den Zuwachs +16 erstmals für $n = 11$ und letztmals bei $n = 10 + 4 + 1 = 15$. Es gibt ihn also genau 5 Mal. Dann wächst der Zuwachs auf +32 an und bleibt dann 6 Mal bei +32 (wegen +16 einmal bei $d = 5$ und +16 fünf Mal bei v). Das Ziel ist es eine explizite Darstellung der Folge $A_4(n)$ zu erhalten.

Anschauliche Idee:

Es werden „Pflöcke“ an den Stellen eingeschlagen, an denen sich der Zuwachs verändert. n^* bezeichne den kleineren der beiden Werte, zwischen denen der Sprung stattfindet, p sei die Nummer des Sprunges. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

p	1	2	3	4	5	6	7
n^*	1	3	6	10	15	21	28
Zuwachs	+2	+4	+8	+16	+32	+64	+128

Ziel ist es jetzt, einen Zusammenhang zwischen n^* und p zu finden.

Offensichtlich gilt: $n^* = \sum_{i=1}^p i = \frac{(p+1)p}{2}$

Die Gleichung $n^* = \frac{(p+1)p}{2}$ kann nach p aufgelöst werden, um die Sprungstellennummer zu bestimmen. Es gilt: $0,5p^2 + 0,5p = n^*$ bzw. $p^2 + p - 2n^* = 0$. Die Werte von n, die eine ganzzahlige, positive Lösung von p liefern, sind die Sprungstellen n^* .

Beispiel:

$n = 36 \rightarrow p^2 + p - 72 = 0$
 $\rightarrow (p + 9) \cdot (p - 8) = 0 \rightarrow p = 8$ und $n = n^*$.
 Für den Zuwachs z, der erstmals ab dieser Sprungstelle eintritt, gilt: $z = 2^p$.

Strategie:

- 1) Für beliebiges n den größten Wert $n^* \leq n$ bestimmen, an dem der Sprung mit der Nummer p stattfindet.
- 2) Berechnen der Anzahl der Züge $A_4(n^*)$.
- 3) Dann $(n - n^*)$ mal den Zuwachs $z = 2^p$ addieren.

1) Berechnung von n^*

Für beliebiges n ergeben sich die reellen (nicht notwendig ganzzahligen) Lösungen der quadratischen Gleichung $p^2 + p - 2n = 0 \rightarrow p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8n}}{2}$

Da nur positive Lösungen betrachtet werden, gilt: $p_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+8n}}{2}$

Da die Nummer des Sprunges ganzzahlig ist, kann die Hilfsfunktion f definiert werden:

$$f(n) = \text{Int} \left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right)$$

Die Funktion f liefert für alle n die entscheidende Sprungnummer p und n^* .

2) Berechnung von $A_4(n^*)$

$A_4(n^*)$ wird berechnet, indem zum Startwert 1 alle Zuwächse bis zu n^* addiert werden.

Beispiel:

$$A_4(10) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 49; f(n) = \text{Int}\left(\frac{\sqrt{8 \cdot 10 + 1} - 1}{2}\right) = 4 = p$$

$$A_4(10) = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = \sum_{i=0}^3 (i+1) \cdot 2^i$$

So wird das Muster zur Berechnung deutlich:

$$A_4(n^*) = \sum_{i=0}^{p-1} (i+1) \cdot 2^i$$

$$\text{Es gilt } \sum_{i=0}^{p-1} (i+1) \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{p-1} i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{p-1} 2^i$$

Mit $\sum_{i=0}^{p-1} 2^i = 2^p - 1$ und $\sum_{i=0}^{p-1} i \cdot 2^i = 2 + (p-2) \cdot 2^p$ folgt:

$$A_4(n^*) = 2 + (p-2) \cdot 2^p + 2^p - 1 = 1 + (p-1) \cdot 2^p$$

3) Daraus ergibt sich

$$A_4(n) = A_4(n^*) + (n - n^*) \cdot 2^p$$

$$A_4(n) = 1 + (p-1) \cdot 2^p + (n - n^*) \cdot 2^p$$

$$A_4(n) = 2^p \cdot (n - n^* + p - 1) + 1$$

Einsetzen von $n^* = \frac{(p+1)p}{2} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p$ liefert:

$$A_4(n) = 2^p \cdot \left(n - \left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p\right) + p - 1\right) + 1$$

$$A_4(n) = 2^p \cdot \left(n - \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right) - 1\right) + 1$$

$$A_4(n) = 2^p \cdot \left(n - 1 - \frac{1}{2}p \cdot (p-1)\right) + 1$$

Wird nun noch p durch $f(n)$ ersetzt, dann folgt für die Formel für vier Stäbe:

$$f(n) = \text{Int}\left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right)$$

$$A_4(n) = 2^{f(n)} \cdot \left(n - 1 - \frac{1}{2}f(n) \cdot (f(n) - 1)\right) + 1$$

Unser Beispiel:

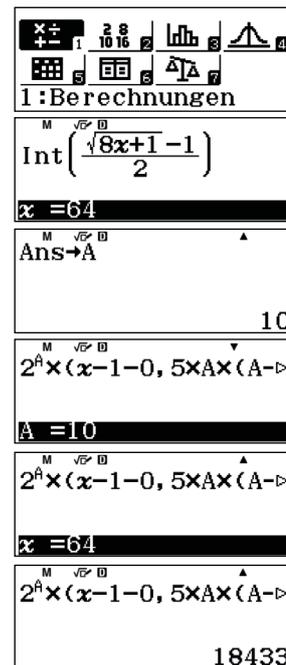
$$n = 64 \rightarrow f(64) = \text{Int}\left(\frac{\sqrt{8 \cdot 64 + 1} - 1}{2}\right) = \text{Int}\left(\frac{\sqrt{513} - 1}{2}\right) = 10$$

$$A_4(64) = 2^{10} \cdot \left(64 - 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - 1)\right) + 1 = 1024 \cdot (63 - 45) + 1 = 18433$$

Zeitabschätzung: 18433 Sekunden sind 5 h 7 min 13 s. Der Effekt des vierten Stabes ist einfach gewaltig.

Einsatz des CASIO FX-87DE X

Berechnung der Folge mit der CALC-Taste im Menü 1:



Ankündigung

Einleitung zur Python-Reihe

Autor: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

Am 23. Juni 2022 hat die Kultusministerkonferenz die Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) neu gefasst. Aus den Erfahrungen der vergangenen 10 Jahre wurden die Kompetenzbeschreibungen im Vergleich zur früheren Ausgabe in vielen Bereichen präzisiert.

Unter dem Link https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf steht das Papier zum Download zur Verfügung.

Hier der direkte Link per QR-Code:



Einfluss nehmen auch die KMK-Strategien „Bildung in der digitalen Welt“ (2016) und die Ergänzung „Lehren und Lernen in der digitalen Welt“ (2021), nach denen die Berücksichtigung veränderter Bedingungen für das Lehren und Lernen im Kontext digitalen Wandels Aufgabe aller Fächer ist. Für die Bildungsstandards Mathematik ergibt sich hieraus eine neue prozessbezogene Kompetenz: „Mit Medien mathematisch arbeiten“. Diesbezüglich werden in nächster Zeit alle Bundesländer die bestehenden Lehrpläne hinsichtlich der veränderten Bedingungen anpassen müssen. Eine erste Evaluation der veränderten Bildungsstandards ist für das Jahr 2030 vorgesehen.

Digitale Medien, die für das Lernen und Lehren von Mathematik relevant sind, lassen sich in mathematikspezifische und allgemeine Medien unterteilen. Als mathematikspezifisch gelten vor allem digitale Mathematikwerkzeuge und Medien, die das Mathematiklernen fördern können. Hierzu zählen Apps und interaktive Lernangebote, wie z.B. ClassPad Learning. Allgemeine Medien sind zum Beispiel Videos, Textverarbeitung und Präsentationsmedien, die dabei helfen, mathematikhaltige Informationen zu bündeln, zu präsentieren und zu beurteilen.

Leserinnen und Leser des CASIO forum nutzen schon lange digitale Mathematikwerkzeuge zum Problemlösen, Entdecken, Modellieren, zur Datenverarbeitung, zum Kontrollieren und für Darstellungswechsel. Für ihre Schülerinnen und Schüler ist das Ganze nichts Neues. Eine wichtige Kompetenz ist nach unserer Meinung, Algorithmen mithilfe digitaler Werkzeuge auf ihren jeweils zugrunde liegenden mathematischen Inhalt zu untersuchen. Dies gelingt in besonderer Weise, wenn Schülerinnen und Schüler Algorithmen selbst programmieren. Hierfür kann eine Tabellenkalkulation, aber auch eine geeignete Programmiersprache verwendet werden. Es bietet sich Python an, eine Programmiersprache, die u.a. in Frankreich im Mathematikunterricht bereits verpflichtend verwendet wird. CASIO trägt dem Rechnung, indem es ein Python-Modul für den GTR CG50 zur Verfügung stellt.

In einer neuen Artikelreihe möchten wir in den kommenden Ausgaben des CASIO forum Anregungen zur Python-Programmierung im Mathematikunterricht geben und wünschen Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern viel Spaß beim Ausprobieren.

Rekursive Pythonfunktionen mit dem FX-CG50

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicky, Tangermünde

Es stand sehr schlimm um des Bandwurms Befinden. Ihn juckte immer etwas hinten. Dann konstatierte der Doktor Schmidt, Nachdem er den Leib ihm aufgeschnitten, Daß dieser Wurm an Würmern litt, die wiederum an Würmern litten – Ringelnatz

Auf eine einfache Formel gebracht, bedeutet Rekursion in der Programmierung „Wiederholung durch Selbstaufwurf“. Eine rekursive Funktion läuft gewissermaßen auf sich selbst zurück, indem sie sich in ihrem Anweisungsteil ständig selbst aufruft, bis das Rekursionsende erreicht ist. Wie der Baron Münchhausen sich an seinem eigenen Haarschopf aus dem Sumpf zog und dabei auch noch sein teures Pferd rettete, so berechnet eine rekursive Funktion ihren Funktionswert durch sich selbst. Zwei Fragestellungen sind „klassische“ Aufgaben zur rekursiven Problemlösung:

Fakultät und Turm von Hanoi.

Die Fakultätsfunktion $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ kann rekursiv wie folgt definiert werden:
 $f(0) = 1$ und $n! = n \cdot (n-1)!$, wenn $n > 0$.

Im folgenden Pythonprogramm wird diese Definition verwandt.

```

fac.py 001/008
def f(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*f(n-1)
z=int(input("n:"))
print(z,"!=" f(z))
MicroPython v1.9.4
|CASIO COMPUTER CO.,
>>>from fac import *
n:9
9 != 362880
>>>

```

Die Aufgabe *Turm von Hanoi* lautet: Ein Turm, der aus n auf dem Platz A übereinanderliegenden Scheiben besteht, deren Durchmesser von oben nach unten zunehmen, soll so zum Platz B mit möglichst wenigen Bewegungen umgestapelt werden, dass jeweils nur eine Scheibe bewegt werden darf und nie eine größere Scheibe auf einer kleineren liegt. Dabei darf ein Hilfsplatz H benutzt werden. Es soll jede Scheibenbewegung und die Anzahl der erforderlichen Scheibenbewegungen ausgegeben werden. Der rekursive Lösungsansatz besteht darin, dass zunächst der Turm aus den $(n-1)$ oberen Scheiben von A nach H umgestapelt wird, dann die größte Scheibe von A nach B gelegt wird und schließlich der Turm, der aus $(n-1)$ Scheiben besteht, von H nach B umgestapelt wird.

Besteht der Turm nur aus einer Scheibe, so ist nur eine Bewegung erforderlich, nämlich die Bewegung der Scheibe von A nach B . Mit dem folgenden Programm wird diese Lösungsidee realisiert.

```

#Turm von Hanoi
z=0
def umbau(n,A,B,H):
    global z
    if n==1:
        print („Von“, A, „nach“, B, „.“)
        z=z+1
    else:
        umbau(n-1,A,H,B)
        print („Von“, A, „nach“, B, „.“)
        z=z+1
        umbau(n-1,H,B,A)
n=int(input („n:"))
umbau(n, „A“, „B“, „H“)
print(z, „Bewegungen.“)

```

Die Anzahl der Scheibenbewegungen wird mithilfe der globalen Variablen z ermittelt. Erwartungsgemäß beträgt die minimale Anzahl der Scheibenbewegungen $2^n - 1$, mittels vollständiger Induktion kann das bewiesen werden.

Die Quersumme einer natürlichen Zahl lässt sich auch rekursiv berechnen.

```

# Quersumme rekursiv
def qs(n):
    if n<10:
        return n
    else:
        return qs(n//10)+n%10
n=int(input („n:"))
print („QS von“, n, „=“, qs(n))

```

```

Quer.py 001/008
def qs(n):
    if n<10:
        return n
    else:
        return qs(n//10)+
n=int(input („n:"))
print („QS von“, n, „=“,

```

```

>>>
>>>
* SHELL Initialized *
>>>from Quer import *
n:1618033
QS von 1618033 = 22
>>>

```

Die Quersumme einer einstelligen Zahl ist die Zahl selbst. Wenn die Zahl mehrstellig ist, wird mittels ganzzahliger Division durch 10 die letzte Ziffer abgeschnitten und zur Quersumme der verkürzten Zahl die abgeschnittene Einerziffer addiert. Das wird mit der Anweisung $qs(n//10)+n\%10$ verwirklicht. Dabei ist $n//10$ die ganzzahlige Division durch 10 und $n\%10$ liefert die Einerziffer von n als den Rest bei der Division durch 10.

Mithilfe einer rekursiven Funktion lassen sich **Zeichenketten umkehren**. Zum Beispiel wird aus LAGER dann REGAL.

```

# Wortumkehr rekursiv
def wum(z):
    if len(z)==1:
        return z
    else:
        return z[-1]+wum(z[:-1])
w=input („Wort: „)
print(wum(w))

```

```

wuk.py 001/007
def wum(z):
    if len(z)==1:
        return z
    else:
        return z[-1]+wum(
w=input („Wort:“)
print(wum(w))

```



Mit $z[-1]$ wird das letzte Zeichen der Zeichenkette z ermittelt. Mithilfe von $z[:-1]$ wird von der Zeichenkette z das letzte Zeichen entfernt. Mittels „+“ werden Zeichenketten verkettet (Konkatenation). Die Funktion wum kehrt eine Zeichenkette dadurch um, dass berücksichtigt wird, dass die Umkehrung von Wörtern, die nur aus einem Zeichen bestehen, diese Zeichenkette selbst ist, ansonsten wird das letzte Zeichen vor die Umkehrung der Zeichenkette, der das letzte Zeichen fehlt, gesetzt.

Die Funktion für das Umkehren von Zeichenketten ist nützlich, wenn festgestellt werden soll, ob eine Zeichenkette ein Palindrom ist.

Monte Carlo auf dem fx-CG50

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

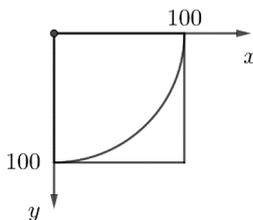
Mithilfe der Monte-Carlo-Methoden werden Aufgaben durch stochastische Simulationen gelöst. Der Name der Methoden weist auf die Spielbank Monte Carlo im gleichnamigen Stadtteil des Stadtstaates Monaco hin. Letztlich beruhen diese Verfahren auf dem Gesetz der großen Zahlen. In unseren Beispielen wird ausgenutzt, dass sich die relative Häufigkeit bei zunehmender Anzahl der Wiederholungen des Zufallsversuchs der Wahrscheinlichkeit nähert.

Die Kreiszahl π ergibt sich mithilfe Wahrscheinlichkeit, dass ein Tropfen eines Zufallsregens, der auf ein Quadrat niedergeht, in das Innere des Kreises fällt, der diesem Quadrat einbeschrieben ist:

$$P(\text{Tropfen landet im Kreisinneren}) = \frac{\text{Flächeninhalt des Kreises}}{\text{Flächeninhalt des Quadrates}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Das gilt aufgrund der geometrischen Wahrscheinlichkeit.

Hier wird die Simulation mithilfe von Python vorgenommen und mittels `casioplot` veranschaulicht. Zur Vereinfachung betrachten wir einen Viertelkreis in einem Quadrat mit der Seitenlänge 100. Der Punkt $P(x|y)$ mit nicht negativen Koordinaten liegt genau dann innerhalb des Viertelkreises, wenn $x^2+y^2 < 100^2$.



Die Tropfen des Zufallsregens werden als Punkte mit den Koordinaten $x=\text{randint}(0,100)$ und $y=\text{randint}(0,100)$ modelliert. Die relative Häufigkeit für das Ereignis Tropfen im Viertelkreis ergibt sich als

$$\frac{\text{Anzahl der Tropfen im Viertelkreis}}{\text{Gesamtanzahl der Tropfen}}$$

Das ist ein Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tropfen in den Viertelkreis fällt, nämlich

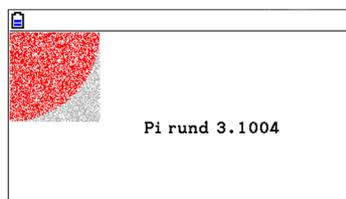
$$\frac{\frac{1}{4} \cdot 100^2 \cdot \pi}{100^2} = \frac{1}{4} \pi$$

Folglich ist $4 \cdot \frac{\text{Anzahl der Tropfen im Viertelkreis}}{\text{Gesamtanzahl der Tropfen}}$

ein Näherungswert für π .

Mit dem folgenden Pythonprogramm wird dieses Vorgehen modelliert und grafisch dargestellt.

```
from random import *
from casioplot import *
z=0
for i in range(10000):
    x=randint(0,100)
    y=randint(0,100)
    if x**2+y**2<100**2:
        z=z+1
        set_pixel(x,y,(255,0,0))
    else:
        set_pixel(x,y,(190,190,190))
show_screen()
for j in range(10):
    pass
p=z/(i+1)
raw_string(150,100,"Pi rund "+str(4*p))
```



Mit den ersten beiden Zeilen werden alle Befehle der Module `random` und `casioplot` eingebunden.

Mit $z=0$ wird der Zähler für die Treffer im Viertelkreis auf null gesetzt. Die Anzahl der Zufallsversuche wird mit `range(10000)` festgelegt, hier sind es 10000. Durch $z=z+1$ wird der Zähler der Treffer um 1 erhöht, wenn ein Treffer erfolgt.

Der Befehl `set_pixel(x,y,(255,0,0))` bewirkt, dass der Punkt $P(x|y)$ als rotes Pixel in den Viertelkreis gezeichnet wird. Liegt der Punkt nicht im Viertelkreis, wird er mittels `set_pixel(x,y,(190,190,190))` als graues Pixel dargestellt. Der Befehl `show_screen()` sorgt dafür, dass die Grafik nach jedem Durchlaufen des Schleifenkörpers der Zählschleife neu gezeichnet wird. Die Zeilen `for j in range(10):` und `pass` verzögern den Ablauf der Simulation. Ein Befehl von der Art `delay` steht leider nicht zur Verfügung. Mittels $p=z/(i+1)$ wird die relative Häufigkeit berechnet.

Mit dem Befehl `raw_string(150,100,"Pi rund "+str(4*p))` wird schließlich die Zeichenkette, die den Text „Pi rund ...“ darstellt, an der Position (150|100) ausgegeben.

Als zweites Beispiel wird untersucht, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass man aus den drei Stücken, in die ein Stab zufällig zerlegt wird, ein Dreieck legen kann.

Es wird angenommen, dass der Stab die Länge 1 hat. Die Stellen, an denen der Stab zerlegt wird, seien die Zufallszahlen z_1 und z_2 , die zwischen 0 und 1 liegen.

Wenn $z_1 < z_2$, dann haben die drei Stücke die Längen $s_1=z_1$, $s_2=z_2-z_1$ und $s_3=1-z_2$, sonst haben die drei Stücke die Längen $s_1=z_2$, $s_2=z_1-z_2$ und $s_3=1-z_1$.

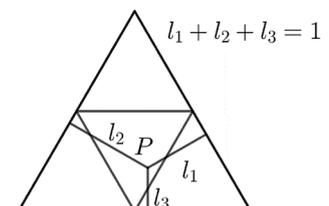
Aus diesen drei Stücken lässt sich genau dann ein Dreieck legen, wenn die Bedingungen $s_1+s_2 > s_3$, $s_1+s_3 > s_2$ und $s_2+s_3 > s_1$ gleichzeitig erfüllt sind.

Aus diesen Vorüberlegungen resultiert das Programm:

```
from random import *
n=int(input("n="))
d=0
for i in range(n):
    z1=random()
    z2=random()
    if z1<z2:
        s1=z1
        s2=z2-z1
        s3=1-z2
    else:
        s1=z2
        s2=z1-z2
        s3=1-z1
    if s1+s2>s3 and s1+s3>s2 and
s2+s3>s1:
        d=d+1
h=d/n
print("Die WK ist rund",h)
```

Die angezeigten Ergebnisse lassen vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit 0,25 beträgt.

Diese Vermutung ist richtig. Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhen die Länge 1 haben, dann gilt aufgrund des Satzes von VIVIANI, dass für jeden Punkt im Inneren des Dreiecks die Summe der Längen der Lote auf die drei Dreiecksseiten konstant 1 ist. Jedem inneren Punkt des Dreiecks ist somit eindeutig ein Tripel nicht negativer Zahlen zugeordnet, deren Summe 1 ergibt. Betrachten wir die vier Dreiecke, die durch Einzeichnen der Mittelparallelen entstehen. Die drei Zahlen, die jedem Punkt zugeordnet sind, sind genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks, wenn der Punkt innerhalb des mittleren Dreiecks liegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt aber $\frac{1}{4}$.

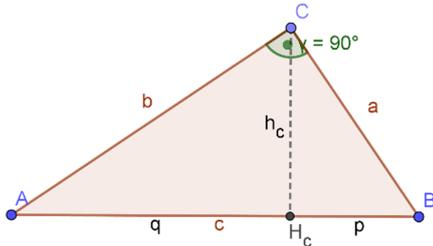


Entdeckungen am rechtwinkligen Dreieck

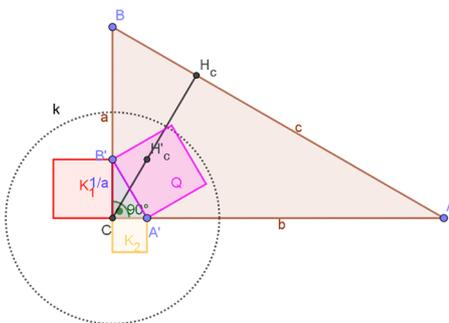
Autor: Manuel García Mateos, Gymnasium am Steinwald, Neunkirchen

Eine weitere Formulierung des Satzes des Pythagoras.

Betrachtet wird ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ und der Höhe h_c . Dann gilt die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$.



Wird nun im Punkt C ein Einheitskreis gezeichnet und die Punkte A, B sowie der Höhenschnittpunkt H_c gespiegelt, dann ergibt sich ein neues Dreieck $A'B'C$, wobei die Punkte A' und B' die Spiegelpunkte von A und B sind. Da die Punkte A' und B' auf den Katheten a und b liegen, ist das Dreieck $A'B'C$ wieder rechtwinklig mit $\gamma = 90^\circ$ und es gilt $(a')^2 + (b')^2 = (c')^2$. Dieses neue Dreieck ist nun aber nicht mehr ähnlich zum ursprünglichen Dreieck ABC.



Der Flächeninhalt des invertierten Kathetenquadrats K₁ beträgt 0.31 FE
 Der Flächeninhalt des invertierten Kathetenquadrats K₂ beträgt 0.1 FE.
 Der Flächeninhalt des invertierten Hypotenusenquadrats Q beträgt 0.41 FE

Aufgrund der Spiegelung am Kreis gilt $a' = \frac{1}{a}$ und $b' = \frac{1}{b}$. Für das Quadrat der neuen Hypotenuse $(c')^2$ gilt daher

$$(c')^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{(b^2 + a^2)}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{(ab)^2} = \left(\frac{c}{ab}\right)^2$$

und die Hypotenusenlänge ist entsprechend $c' = \frac{c}{ab}$. Es ist also $c' \neq \frac{1}{c}$. Schade! ☹️

Die Untersuchung des Ausdrucks $(c')^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} = \left(\frac{c}{ab}\right)^2$ führt zu folgender Feststellung: Werden die Kathetensätze $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$ nach p bzw. q aufgelöst und die entstehenden Ausdrücke multipliziert, so ergibt sich

$$p \cdot q = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{a^2 b^2}{c^2} = h_c^2.$$

Ein Vergleich des Ausdrucks für $(c')^2$ mit h_c^2 , zeigt, dass $(c')^2 = \frac{1}{h_c^2} = \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$ ist. Zu-

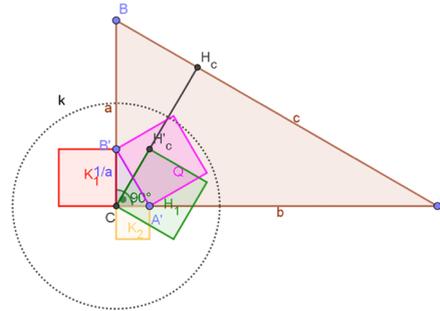
sammengefasst ergibt sich also ein „neuer“ Satz von Pythagoras in der Form $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$, ein schönes Ergebnis. Es ist daher folgende Interpretation bzw. Formulierung des Satzes von Pythagoras möglich:

Wenn ein Dreieck ABC rechtwinklig ist, dann gilt für die Summe der Quadrate über den Kehrwerten der Katheten, dass diese gleich dem Quadrat über dem Kehrwert der Höhe über der Hypotenuse des Dreiecks ABC ist.

Alternativ lässt sich mithilfe der Algebra formulieren:

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ und der Höhe h_c auf der Hypotenuse c.

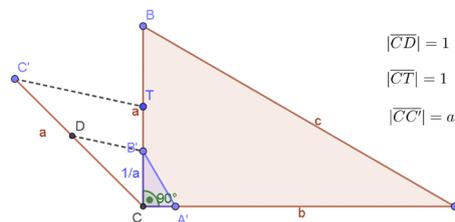
Es ist dann $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$.



Der Flächeninhalt des invertierten Kathetenquadrats K₁ beträgt 0.31 FE
 Der Flächeninhalt des invertierten Kathetenquadrats K₂ beträgt 0.1 FE.
 Der Flächeninhalt des invertierten Hypotenusenquadrats Q beträgt 0.41 FE
 Der Flächeninhalt des invertierten Höhenquadrats H₁ beträgt 0.41 FE.

Auch der Kehrsatz dieser Pythagoras-Darstellung gilt natürlich: „Wenn in einem Dreieck ABC die Beziehung $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig mit $\gamma = 90^\circ$.“ Der Beweis erfolgt durch Kontraposition. Wenn $\gamma < 90^\circ$ ist, dann $a^2 + b^2 > c^2$ und $h_c^2 > p \cdot q$. Hieraus folgt nun, dass $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 > \left(\frac{c}{ab}\right)^2 = \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$. Für $\gamma > 90^\circ$ folgt aus $a^2 + b^2 < c^2$ und $h_c^2 < p \cdot q$, dass $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 < \left(\frac{c}{ab}\right)^2 = \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$ ist.

Anstatt die Strecken $a' = \frac{1}{a}$, $b' = \frac{1}{b}$ und $h_c' = \frac{1}{h_c}$ (wobei h_c' die Streckenlänge $|\overline{CH_c}|$ meint und nicht die Höhe des Dreiecks $A'B'C$ auf die Hypotenuse c') mithilfe einer Inversion am Kreis zu konstruieren, können diese natürlich auch mithilfe des Strahlensatzes erzeugt werden.



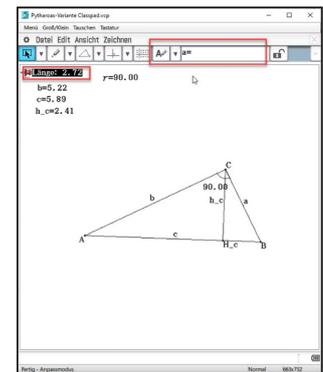
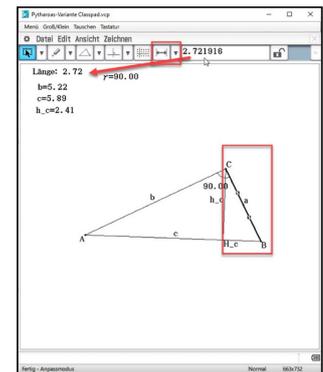
$$|\overline{CD}| = 1$$

$$|\overline{CT}| = 1$$

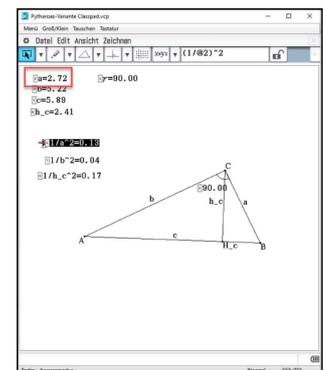
$$|\overline{CC'}| = a$$

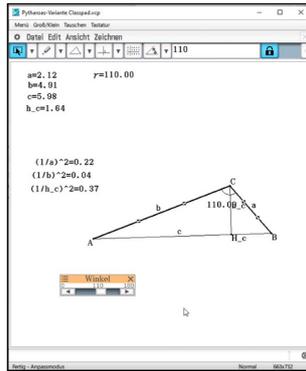
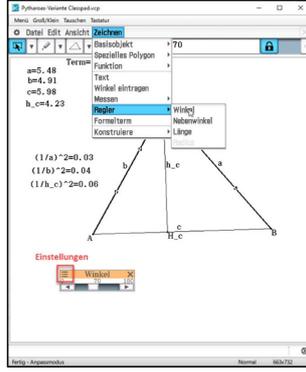
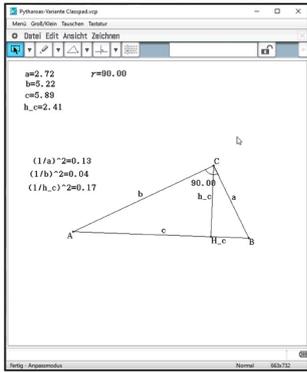
Umsetzung mit dem ClassPad

Diese Entdeckung gelingt auch mit dem ClassPad. Dazu werden im Geometrie-Modul ein rechtwinkliges Dreieck ABC gezeichnet, die Seitenlängen a, b und c, sowie Höhenschnittpunkt H_c , bestimmt, die Höhe h_c eingezeichnet und die Länge der Höhe ermittelt. Die Größen lassen sich dann in das Zeichenfenster „hineinziehen“ und neu bezeichnen.



Über den Menüpunkt Zeichnen > Formelterm werden nun Berechnungen mit den einzelnen Objekten durchgeführt. Dabei werden die Objekte auf der Zeichenebene durchnummeriert. Die Eingabe von $(1/@2)^{\wedge}2$ berechnet beispielsweise das Quadrat des Kehrwerts des zweiten Objekts, in diesem Fall die Länge der Seite a. Auf diese Weise werden nun sämtliche Objekte berechnet und sinnvoll bezeichnet.





Durch Ziehen an den Punkten A, B oder C verändern sich die entsprechenden Werte und die Richtigkeit der durchgeführten Überlegungen kann bestätigt werden.

Leider hat der ClassPad kein Werkzeug, um die Inversion am Kreis durchzuführen, so dass die Konstruktionen der Spiegelpunkte A' und B' und der entsprechenden Quadrate über den neuen Katheten, der neuen Hypotenuse und der invertierten Höhe sehr mühsam sind. Darauf kann verzichtet werden. Dennoch eignet sich der ClassPad, um die Richtigkeit zu kontrollieren.

Der Kehrsatz lässt sich gut mithilfe eines Schiebereglers überprüfen. Hierzu werden die beiden Strecken a und b des Dreiecks markiert und über Zeichnen > Regler > Winkel wird ein Schieberegler für den Winkel eingeführt. Dieser kann dann passend eingestellt werden.

Nun ist festzustellen:
Wenn der Winkel $\gamma < 90^\circ$ ist, dann ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 > \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$$

und wenn $\gamma > 90^\circ$ ist, dann ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 < \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$$

Damit ist der Kehrsatz durch Kontraposition bewiesen, denn aus $\gamma \neq 90^\circ$ folgt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \neq \left(\frac{1}{h_c}\right)^2$$

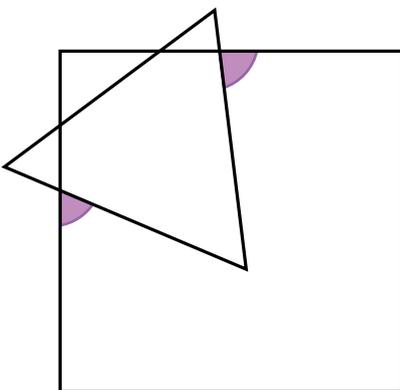
Rätselecke

Knobelaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck.

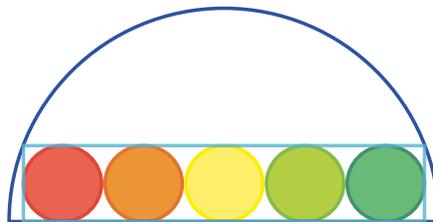
Bestimme die Summe der beiden markierten Winkel.



Aufgabe 2

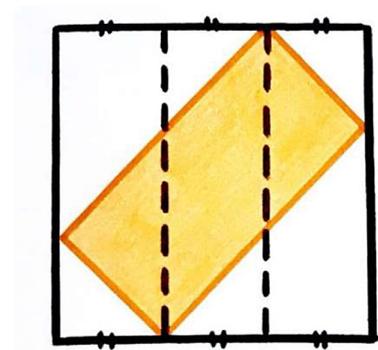
Jeder kleine Kreis hat die Fläche 1.

Bestimme die Fläche des Halbkreises.



Aufgabe 3

Bestimme den Anteil der Quadratfläche, der vom Rechteck bedeckt wird.



Die schnellste Skateboard-Bahn

Autor: Dr. Jens Weitendorf, Universität Hamburg

Es wird eine Bahn gesucht, die die schnellste Verbindung zwischen zwei Punkten A und B ermöglicht.

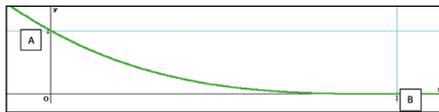


Abb. 1: Mögliche Form einer schnellen Skateboard-Bahn

Die Zeit, die benötigt wird, um von A nach B zu gelangen, hängt auch von der Form der Bahn ab. Wenn es am Anfang steiler ist, wird eher eine größere Geschwindigkeit erreicht, aber die Bahn wird auch länger. Gibt es eine optimale Bahn?

Um dies genauer zu untersuchen, werden die folgenden Vereinfachungen vorgenommen:

- 1) Von einer Reibung wird abgesehen.
- 2) Als Punkte werden A(0/1) und B(1/0) gewählt.
- 3) Die Erdbeschleunigung wird mit $g = 1 \frac{m}{s^2}$ angenommen.
- 4) Auf Einheiten wird verzichtet.

Dies ist sinnvoll, da eine optimale Bahnform gesucht wird, die unabhängig von diesen Setzungen ist.

Zuerst werden zwei Grenzfälle betrachtet:

1. Grenzfall:

A und B werden durch eine gerade Linie verbunden. Dann gilt:

$$\text{Streckenlänge: } s = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Beschleunigung: } a = \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Benötigte Zeit:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Tempo bei B: } v = a \cdot t = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$$

2. Grenzfall:

Der Körper fällt zunächst senkrecht nach unten und bewegt sich dann horizontal zum Punkt B. Dann gilt:

$$\text{Streckenlänge: } s = 2$$

$$\text{Beschleunigung für den senkrechten Fall: } a = 1$$

$$\text{Zeit für den Fall: } s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{2}$$

$$\text{Tempo bei B: } v = a \cdot t_1 = \sqrt{2}$$

$$\text{Zeit für die horizontale Strecke: } t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Benötigte Zeit insgesamt:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2,1213$$

Diese beiden Grenzfälle legen die Vermutung nahe, dass es eine gekrümmte Bahn gibt, die die Durchlaufzeit minimiert. Wegen des Energieerhaltungssatzes wird in allen Fällen das Tempo bei B das gleiche sein. Wenn am Anfang die Kurve steiler ist, ist die Beschleunigung größer, wodurch das anfängliche Tempo ebenfalls größer wird und sich so die Durchlaufzeit verkürzt. Um

eine optimale Bahn zu finden, werden Grafen von Polynomen untersucht, die durch die Punkte A und B verlaufen. Die entsprechenden Funktionsgleichungen haben die Form: $f(x) = (-1)^n(x-1)^n$

Zuerst wird die Formel für die Berechnung von Bogenlängen von Funktionsgraphen hergeleitet: Der Graf wird dazu durch einen Polygonzug angenähert. Das Intervall [a,b] wird in n Teilintervalle gleicher Länge unterteilt.

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$$

$$\text{Polygonzug: } (x_{k-1}, f(x_{k-1})) \rightarrow (x_k, f(x_k))$$

Länge des Polygonzugs:

$$L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

$$= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}$$

Ist f differenzierbar auf [a,b], so folgt:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Die Untersuchung beginnt mit dem Grafen der Funktion $f(x) = (x-1)^2$

Für die Beschleunigung in einem Punkt $(x, f(x))$ gilt: $a = g \cdot \sin(\alpha)$, wobei α der Steigungswinkel des Funktionsgraphen in diesem Punkt ist. Für den Steigungswinkel α gilt: $\alpha = \tan^{-1}(f'(x))$.

Da die Beschleunigung nicht konstant ist, lässt sich die Zeit t nicht mit der Formel $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ bestimmen. Das bedeutet: Die Bahn ist in Abschnitte zu unterteilen und die Zeiten sind abschnittsweise zu berechnen. Für die konkrete Berechnung wird eine Tabellenkalkulation eingesetzt.

Die auszuführenden Rechenschritte sind:

$$f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-1)$$

Unterteilen des Intervalls [a,b] in n Abschnitte: $x_k = x_{k-1} + \frac{1}{n}$

Bestimmen der Beschleunigung für den mittleren Wert im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$

$$a_k = -\sin(\tan^{-1}(f'(x_{k-1} + \frac{1}{2n})))$$

$$s_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1 + (2(x-1))^2} dx$$

$$s_k = \frac{1}{2} a_k \cdot t_k^2 + v_{k-1} \cdot t_k$$

$$\Rightarrow t_k = -\frac{v_{k-1}}{a_k} + \sqrt{\frac{v_{k-1}^2}{a_k^2} + \frac{2s_k}{a_k}}$$

$$v_k = a_k \cdot t_k$$

$$t_{ges} = \sum_{k=1}^n t_k$$

Das negative Vorzeichen für a_k ergibt sich, da der Graf fällt, die Beschleunigung in dieser Betrachtungsweise aber positiv ist. Die zweite Lösung für t_k hat keine Relevanz, da diese zu negativen Zeiten führen würde. Dieses lässt sich nun in einer Tabellenkalkulation¹ umsetzen.

Abb. 2: Bestimmung der Zeit für $f(x) = (x-1)^2$

Aus Abbildung 2 wird deutlich, dass die Durchlaufzeit (Zelle: G24) geringer als in den beiden Grenzfällen ist. In E22 steht das Tempo bei B, es ist um ca. 2,6 % zu groß. Wird das obige Verfahren für $f(x) = -(1-x)^3$ durchgeführt, folgt für die Durchlaufzeit $t = 1,82471$ und für die Streckenlänge $s = 1,60311$. Das heißt, es müssen weitere Untersuchungen stattfinden für Potenzwerte $1 < p < 2$ und $2 < p < 3$.

Die folgende Tabelle zeigt Werte für verschiedene Potenzfunktionen.

f(x)	s	t
$(x-1)^2$	1,47894	1,77944
$(x-1)^3$	1,60311	1,82471
$(1-x)^{2,2}$	1,53006	1,81222

Aus der obigen Tabelle ist ersichtlich, dass der Graf von $f(x) = -(1-x)^2$ von den untersuchten Beispielen die geringste Durchlaufzeit hat. Möglich wären noch weitere Untersuchungen mit Hochzahlen 2,01; 2,001; ... 1,99; 1,999; ...

Im Vergleich zum horizontalen Wurf erscheint bei Berücksichtigung von Symmetrien die Parabelform sehr plausibel.

Interessant ist auch, die Fragestellung zu untersuchen, welche Form eine Bahn haben müsste, die unabhängig vom Startpunkt immer zu gleichen Zeiten führt. Für das Fadenpendel gilt dies ja nur angenähert für kleine Amplituden.

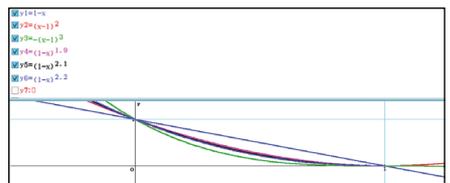


Abb. 3: Die Grafen der obigen Funktionen

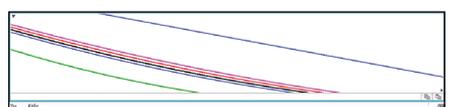


Abb. 4: Ausschnitt und Vergrößerung der Abbildung 3

¹ Mit der TK des ClassPad ist es möglich, auch Integrale direkt zu berechnen. Wird Excel benutzt, muss die Kurve im Intervall $[x_k, x_{k-1}]$ durch eine Gerade angenähert werden.

Fake News zu Covid-19

Autor: Antonius Warmeling, ehem. Fichte-Gymnasium, Hagen

Wie nicht anders zu erwarten, gab und gibt es eine Menge Fake News zur Corona-Epidemie. Inhaltlich dreht sich die Diskussion dabei zum Beispiel um die Frage „Treiben die Ungeimpften die Pandemie an oder sind es die Geimpften?“. Weil Israel sehr früh mit dem Impfen begonnen hat, ploppte diese Auseinandersetzung schon Mitte 2021 dort auf, mittlerweile hat sie auch Deutschland erreicht. Mathematisch nutzen die Autoren das Unwissen vieler Menschen zu statistischen Grundlagen und können daher Daten falsch interpretieren. In diesem Beitrag wird ein englischsprachiges Beispiel vorgestellt. Im Facebook-Post (Abbildung 1) wird behauptet, dass der Pfizer-Impfstoff völlig wertlos sei, weil mehr als 80 % aller an Covid-19-Erkrankten vorher geimpft waren.



Abb. 1: Facebook-Post

Belegt wird das mit Daten des israelischen Gesundheitsministeriums. Weil das entsprechende Dashboard (<https://datadashboard.health.gov.il/Covid-19/general>) in hebräischer Schrift geschrieben ist, ist es nicht leicht, eigene Recherchen zu betreiben. Daher werden zunächst die Daten aus dem Facebook-Post übernommen.

Altersgruppe	Fälle Geimpfte	Fälle Ungeimpfte	Anteil der geimpften Fälle	Anteil der Geimpften in der Bevölkerung
20 – 29	95	25	79%	78%
30 – 39	133	33	80%	83%
40 – 49	175	33	84%	86%
50 – 59	127	18	88%	89%
60 – 69	134	16	89%	91%
70 – 79	90	7	93%	95%
80 – 89	23	2	92%	94%
90+	2	0	100%	93%
Gesamt	779	134		

Tabelle 1: nachgewiesene Fälle vom 27.06. – 03.07.2021

(Quelle: Israel Ministry of Health Dashboard)

Mit der Gesamtzahl der Infizierten kann gezeigt werden, dass die Behauptung richtig ist. Denn rund 85% der Infizierten aus dieser Woche waren vorher geimpft. Und der Vergleich der beiden letzten Spalten zeigt, dass der Anteil der Geimpften in den verschiedenen Bevölkerungsgruppen nur geringfügig größer ist als der Anteil der Geimpften unter den Infizierten. Daraus folgt, dass die Impfung kaum vor einer Infektion mit der Delta-Mutation schützt (um diese geht es zu diesem Zeitpunkt). In dem Post wird das so ausgedrückt: „Cases at low baseline but it's clear vax is bust“ (freie Übersetzung: Die Fälle sind auf niedrigem Level, aber es ist klar, der Impfstoff taugt nichts.). Ganz so schlimm ist es nicht, rech-

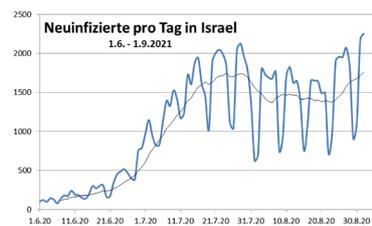
nerisch kann eine 20%ige Reduktion des Infektionsrisikos nachgewiesen werden.

„Dafür der ganze Aufwand, das kann's doch wohl nicht gewesen sein“, argumentiert denn auch der Urheber des Posts. Aber er lässt völlig außer Acht, dass es auch die Aussage gibt, der Impfstoff schütze vor schweren Erkrankungen. Um dem nachzugehen, helfen Zahlen vom 15.08.2021, die Prof. Jeffrey S. Morris, Professor für Biostatistik an der Perelman School of Medicine der University of Pennsylvania, am 17.08.2021 auf Twitter veröffentlicht hat (Tabelle 2). Mittlerweile hat die Delta-Welle das Land erreicht, die Zahlen sind deswegen deutlich höher (Grafik 1).

Alter	Anteil in der Bevölkerung		Schwere Erkrankungen	
	Nicht geimpft	Voll geimpft	Nicht geimpft	Voll geimpft
Alle	1.302.912	5.634.634	214	301
< 50 Jahre	1.116.834	3.501.118	43	11
> 50 Jahre	186.078	2.170.563	171	290

Tabelle 2: Daten aus Israel vom 15.08.2021 (ab 12 Jahren)

(Quelle: Israel Ministry of Health Dashboard)



Grafik 1: Daten der Johns Hopkins University; die dünne schwarze Linie steht für den gleitenden Mittelwert über 7 Tage.

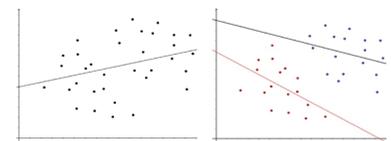
Zunächst werden alle 515 Fälle unter den Nicht- und Vollgeimpften betrachtet. Auch hier ist der Anteil der Geimpften mit schweren Erkrankungen recht hoch, über 60%. Allerdings ist schon zu erkennen, dass die Zahl der nicht geimpften Menschen deutlich geringer ist als die der vollständig geimpften. Um die Zahlen vergleichen zu können, werden sie auf eine bestimmte Größe (z.B. 100.000 Betroffene) normiert: Unter 100.000 Betroffenen gibt es bei den ungeimpften Personen $\frac{214}{13.02912} \approx 16,4$ schwere Erkrankungen und bei den vollständig Geimpften $\frac{301}{56.34634} \approx 5,3$. Die Zahl der schweren Erkrankungen ist etwa um den Faktor 3 größer, die Impfwirksamkeit beträgt $W \approx 1 - \frac{5,3}{16,4} \approx 67,5\%$. Das heißt, der Impfstoff hat zu 67,5% eine schwere Erkrankung verhindert.

In der Medizinstatistik sind folgende Begriffe im Gebrauch:

- Risiko (R)**
= Anteil Erkrankter in einer Gruppe
- Relatives Risiko (RR)**
= Risiko Medikamentengruppe / Risiko Placebo-Gruppe
- Relative Risiko-Reduktion (RRR)**
= $(1 - RR)$, sie wird auch **Wirksamkeit** genannt

Heißt es nicht, die Impfwirksamkeit läge für den Impfstoff von Biontech/Pfizer bei deutlich über 90%? Jeffrey Morris empfiehlt, sich zusätzlich noch die Zahlen in den verschiedenen Altersgruppen anzuschauen. In Tabelle 2 sind die Zahlen für die unter 50- und über 50-Jährigen angegeben. Für die jüngere Gruppe ergibt die Normierung -3,9 schwere Erkrankungen pro 100.000 ungeimpfte und 0,3 pro 100.000 vollständig geimpfte Menschen. Für die Gruppe Ü50 erhält man 90,9 und 13,9. Das zeigt, dass die Gefahr einer schweren Erkrankung für Ältere deutlich erhöht ist. Eine Überraschung gibt es, wenn für beide Altersgruppen die Impfwirksamkeit ausgerechnet wird: für die Jüngeren 91,8% und für die Älteren 85,2%. Sie liegt in beiden Teilgruppen deutlich höher als in der Gesamtgruppe. Der Urheber des Facebook-Beitrags hat bewusst nur die Anteile betrachtet, die seine Botschaft unterstützen. So entstehen Fake News.

Mathematisch liegt ein Phänomen vor, das in der Statistik als Simpson Paradoxon bekannt ist. Es tritt immer dann auf, wenn es in den Teilgruppen eine Variable gibt, die das Ergebnis beeinflusst, die aber in der Gesamtgruppe nicht berücksichtigt wird.



Grafik 2: Veranschaulichung des Simpson Paradoxons (nach: <https://towardsdatascience.com/simpsons-paradox-and-interpreting-data-6a0443516765>)

In diesem Fall ist das das höhere Risiko älterer Menschen, bei einer Corona-Infektion zu erkranken. Zur Erläuterung kann das folgende konstruierte Beispiel eines Medikamententests betrachtet werden. In den beiden Grafiken ist die Genesungswahrscheinlichkeit gegen die Dosierung eines Medikamentes aufgetragen. Werden alle Probanden betrachtet, so bewirkt eine höhere Dosierung eine höhere Genesungswahrscheinlichkeit. Werden aber die Teilgruppen angeschaut (blaue und rote), so ist der entgegengesetzte Effekt zu erkennen.

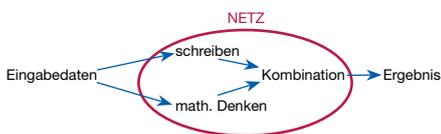
Der Einsatz dieses Beispiels im Unterricht ist immer möglich, wenn neben der Prozentrechnung auch ein Verständnis für den Sachzusammenhang gegeben ist, etwa ab Jahrgangsstufe 8/9. Das Paradoxon muss nicht bekannt sein. Wichtig ist, dass die Lernenden entdecken, dass die richtige Berechnung von prozentualen Anteilen nicht unbedingt die ganze Wahrheit widerspiegelt.

Ein Blick auf Neuronale Netze mit dem ClassPad

Autor: Hannes Stoppel, Max-Planck-Gymnasium Gelsenkirchen

Neuronale Netze (NN) sind ein Schlagwort im täglichen Leben. Wie aber funktionieren sie? Einerseits machen sie alles allein, andererseits werden sie aber von Menschen gebaut; ist das nicht ein Widerspruch? Sind NN nicht so komplex, dass man sie gar nicht mehr verstehen kann? Die Antwort auf alle diese Fragen ist: Nein, ihre Grundgedanken lassen sich leicht nachvollziehen und mit GTR und CAS umsetzen.

Den Grundgedanken zeigt das folgende Bild:

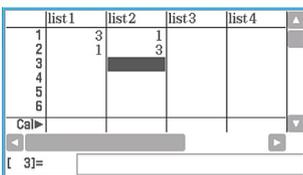


Es kommen Eingaben in ein System, werden in einem (verborgenen) Netz bearbeitet; ihre Ergebnisse werden ausgegeben. (Für Details der Grundgedanken vgl. Rashid, 2017.)

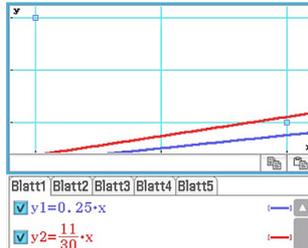
Beispiel: Es sollen Marienkäfer und Raupen nach ihrer Breite und Länge unterschieden werden. Bislang sind die Maße jeweils eines von ihnen bekannt und in der folgenden Tabelle in cm angegeben:

	Marienkäfer	Raupe
Breite	3,0	1,0
Länge	1,0	3,0

Das Ziel liegt jetzt darin, Breite und Länge punktweise in ein Koordinatensystem zu zeichnen und sie dann zur Unterscheidung durch eine Gerade zu trennen. Im CP lassen sich unter die Werte in Listen eintragen:



Mit zeichnet der CP die zugehörigen Punkte in ein Koordinatensystem, und mithilfe von lassen sich lineare Funktionen definieren, deren Graphen – Geraden – mit in das Koordinatensystem eingezeichnet werden:



Wie hier zu sehen ist, lassen sich durch entsprechende Wahl der Parameter diese Trenngeraden so wählen, dass sie „richtig“ verlaufen. Es gibt hierfür unendlich viele Möglichkeiten.

Zusätzliche Daten können dazu führen, dass nicht mehr alle Punkte auf der richtigen Seite der Trenngerade liegen, die Trenngerade also nicht mehr vernünftig trennt. Ein Beispiel hierfür ist gegeben durch die Werte der folgenden Tabelle mit obiger Geraden zu y_2 .

	Marienkäfer	Raupe
Breite	2,3	1,4
Länge	1,8	2,3

Die Lage der Trenngerade ist so zu verändern, dass sie die Daten wie gewünscht trennt. Das lässt sich durch die Veränderung der Geradengleichung schaffen und mit dem CP umsetzen. Durch immer mehr Daten lassen sich die Unterteilungen immer wieder überarbeiten. Damit werden Grundgedanken der NN deutlich.

Wie sich zeigte, liegt ein Ziel in der Entscheidung, ob eine Aussage richtig ist oder nicht. Für einen Computer heißt das: Für den Fall, dass die Aussage richtig ist, wird eine Größe gleich „1“ gesetzt, sonst gleich „0“. In einem Modell-Stromkreis mit einer Lampe und zwei parallel geschalteten Schaltern x_1 und x_2 leuchtet die Lampe genau dann, wenn mindestens ein Schalter geschlossen ist. Ist ein Schalter geschlossen, so wird es mit „1“, sonst mit „0“ bezeichnet.

Hier ergibt sich eine kleine Schwierigkeit, wie die folgende Tabelle mit $\Sigma = x_1 + x_2$ zeigt:

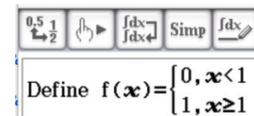
x_1	x_2	Σ	$f(\Sigma)$
0	0	0	0
1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	2	1

Für Σ sollte nur eine 0 oder 1 herauskommen; deswegen muss die 2 zu einer 1 werden. Dies geht z.B. mithilfe der Anwendung der Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Sigma < 1 \\ 1 & \text{für } \Sigma \geq 1 \end{cases}$.

Dann ergibt sich die rechte Spalte der Tabelle.

Anders als üblich, handelt es sich hier um eine nicht stetige Funktion, die sich gut mit dem CP anschauen lässt:

Unter wird sie definiert durch



Dann kann unter die Tabelle angesehen werden, wobei a_{ist} für den Ist-Zustand f steht:

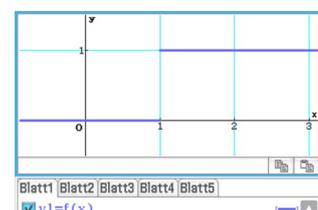
	A	B	C
1	x1	x2	Σ
2	0	0	0
3	0	1	1
4	1	0	1
5	1	1	2
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			

=A3+B3

	A	B	C
1	x1	x2	Σ
2	0	0	0
3	0	1	1
4	1	0	1
5	1	1	2
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			

=A3+B3

Der Graph der Funktion f lässt sich unter ansehen und diskutieren:



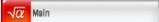
Oft sind nicht nur Lampen im Stromkreis interessant, sondern auch Widerstände. Dann sind die Faktoren von x_1 und x_2 in Σ nicht mehr gleich eins, d.h., es ist $\Sigma = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2$. Hier lässt sich ein Gefühl für die Abhängigkeit erlangen, wenn die w_i als veränderlich betrachtet werden. Sie lassen sich u.U. als Wahrscheinlichkeiten deuten, wenn $w_1 + w_2 = 1$ gilt.

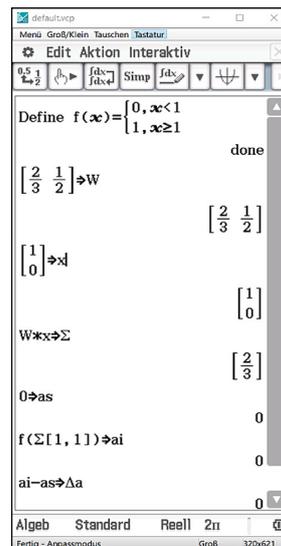
Der Sprung der Funktion ist nicht unbedingt an der Stelle 1, sondern an einer Stelle ϕ , d.h.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Sigma < \phi \\ 1 & \text{für } \Sigma \geq \phi \end{cases}$$

Durch Veränderung von ϕ lässt sich ein Gefühl für die Treppenfunktion f erlangen.

Mit einem Ausblick auf komplexere Systeme ist es sinnvoll, x_1 und x_2 als Vektor zu schreiben sowie w_1 und w_2 als Zeile einer Matrix zu verstehen.

Dann lassen sich die Berechnungen unter  vornehmen:



Bei dieser Rechnung bezeichnet a_s den Soll-Wert aus bisheriger Erfahrung, in obigem Fall bzgl. der Trenngerade zwischen Raupe und Marienkäfer. Nach der Berechnung ergibt sich der Ist-Wert a_{ist} , d.h. unter Berücksichtigung der weiteren Raupen und Marienkäfer. Anschließend wird ihre Differenz berechnet, um die Abweichung zu bestimmen. Mithilfe der Abweichung lässt sich eine Korrektur an W durchführen und der Prozess wird erneut durchlaufen. Hiermit ist ein elementarer Gang durch ein simples Neuronales Netz vollzogen. Größe oder Komplexität lassen sich durch die Erweiterung des Vektors x mit x_1, x_2 und der Matrix W mit w_1, w_2 um weitere Zeilen und Spalten sowie durch eine Veränderung der Funktion f erreichen. Mehrere solcher Schritte können hintereinander stattfinden, die Prozesse unter Anwendung der Abweichung ai erneut durchlaufen werden, was sich als Lernprozess eines NN betrachten lässt. Dadurch werden die NN komplexer.

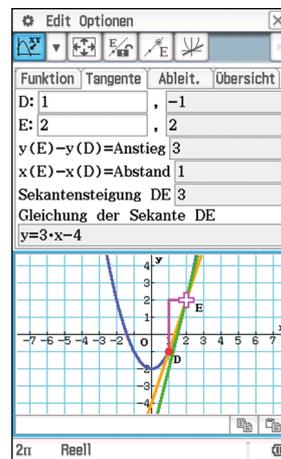
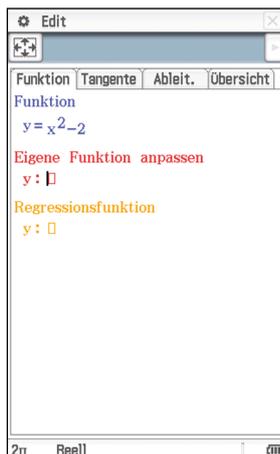
Aufgabenbeispiel

Anschauung für die Differentialrechnung

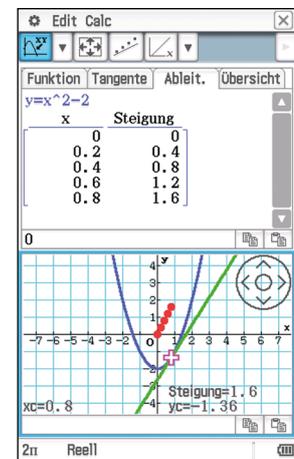
Autor: Casio-Educational-Team

Viele ClassPad-Nutzer setzen zur Einführung in die Differentialrechnung die App „Interaktive Differentialrechnung“ ein. Sie eignet sich sehr gut, um gerade zu Beginn die Anschauung für dieses Thema zu unterstützen. Die App bietet vier Auswahlmöglichkeiten für verschiedene Phasen der Erschließung: Funktion, Tangente, Ableitung und Übersicht.

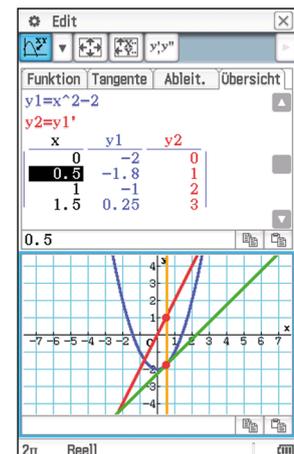
Wird die Funktion im ersten Reiter eingegeben, dann können in „Tangente“ ein fester Punkt D und ein variabler Punkt E definiert werden, zwischen denen der ClassPad die Differenz der x - und y -Werte misst. Zusätzlich gibt der Rechner die Sekantensteigung der Geraden durch die Punkte an und die zugehörige Geradengleichung. Mit dem Cursor kann nun der Punkt E verändert werden.



In „Ableitung“ ist es möglich, den Berührungspunkt der Tangente mit den Cursortasten zu bewegen. Mit der EXE-Taste kann der Wert der Tangentensteigung an der aktuellen Stelle als Punkt ins Koordinatensystem eingetragen werden. Eine Vermutung über den zu diesen Punkten passenden Funktionsterm kann über CALC eingegeben und visuell überprüft werden. Zusätzlich errechnet der ClassPad dort nach Auswahl der passenden Regression eine mögliche Steigungsfunktion. Beide Vermutungen werden unter „Funktion“ eingetragen.



In der Rubrik „Übersicht“ werden x -Wert, Funktion, Tangente, Steigung und Ableitung gemeinsam und übersichtlich angezeigt.



Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen der Lehrpläne in den Bundesländern harmonisiert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaustausch zum Beispiel zu folgenden Themen:

- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten, Informationen zu regionalen Veranstaltungen,
- Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien, bundeslandspezifische Angebote, Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht.

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.



Anmeldung

Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten – dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten, und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz
www.casio-schulrechner.de/lehrerinfoservice



oder einfach den QR-Code scannen.



Materialien für den Unterricht

Modellbezogene Literatur, Arbeitsblätter, Tipps und Tricks, Aufgaben und Lösungen, Kopiervorlagen und vieles mehr für einen spannenden Mathematikunterricht finden Sie in dieser übersichtlich strukturierten Materialdatenbank. Sie haben selbst Unterrichtsmaterial erstellt, das Sie teilen möchten? Dann kontaktieren Sie gern die Redaktion.

Im Netz
www.casio-schulrechner.de/materialdatenbank



oder einfach den QR-Code scannen.



Aktuelle Betriebssystemversionen

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: edu.casio.com

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.7001
FX-CG50	3.70
FX-9860GIII	3.60
Software	
ClassPad II Manager	2.01.7000
ClassPad App	über App-Stores (Android/iOS)
FX-CG50 Manager	3.60
FX-Manager Plus	3.50
ClassWiz Emulator	2.01.0020
ES Plus Emulator	5.00

Updates bis Dezember 2022

Educational Team

Telefon: +49 (0)40/528 65-0
 Fax: +49 (0)40/528 65-100
 E-Mail: education@casio.de
 Homepage: www.casio-schulrechner.de

European Support Center

Beratung und technische Informationen
 Telefon: +49 (0)40/528 65-802
 Fax: +49 (0)40/528 65-888
 E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen

Telefon: +49 (0)40/528 65-203
 Fax: +49 (0)40/528 65-242
 E-Mail: repair@casio.de

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Herausgeber:
 CASIO Europe GmbH
 Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
 Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Bildquellen:
 S. 1: Markus Mettin

Redaktion:
 Gerhard Glas und Armin Baeger
 CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
 Dirk Schneider, CONSEQUENCE NEXT, Hamburg

Copyright für alle Beiträge, soweit nicht anders angegeben, bei CASIO Europe GmbH. Für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen wird keine Haftung übernommen. Nachdruck nur mit schriftlicher Genehmigung und Urhebervermerk.

